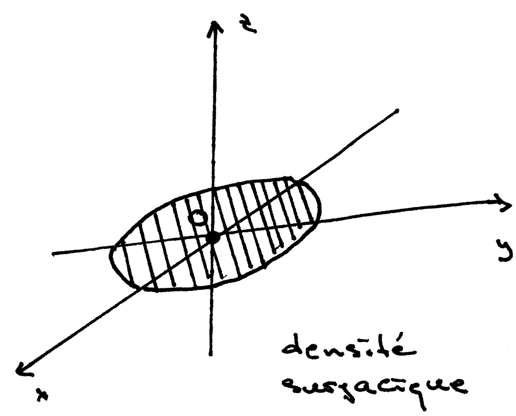
# Electrostatique - Contrôle continu 2007
(correction)

Exercice I. 1). Disque




Plans de symétries :

- le plan xy
- tout plan passant par l'axe Oz.

Invariances du système :

- symétrie de rotations autour de l'axe Oz

a). en un point $M_1$ quelconque :

- nous avons 1 plan de symétrie passant par $M_1$ (notamment celui qui passe par $M_1$ et l'axe Oz). Le vecteur du champ électrique en $M_1$ appartient à ce plan.
- l'invariance de rotations autour de l'axe Oz implique que les composantes de $\vec{E}$, en coordonnées cylindriques $(\rho, \varphi, z)$, peuvent dépendre de $\rho$ et de $z$ mais ne dépendent pas de $\varphi$.

b). en un point quelconque $M_2$ du plan contenant le disque :

- nous avons 2 plans de symétrie passant par $M_2$ : le précédent (passant par $M_2$ et l'axe Oz) et le plan xy. L'intersection de ces 2 plans est la droite $OM_2$ $\Longrightarrow$ $\vec{E}(M_2) \parallel \overrightarrow{OM_2}$.
- dans ce cas $z=0$, donc l'invariance de rotations implique que les composantes de $\vec{E}(M_2)$ ne dépendent que de $\rho$ $\Longrightarrow$ $\vec{E}(M_2) = f(\underbrace{|\overrightarrow{OM_2}|}_{=\rho})\, \underbrace{\vec{e}_{OM_2}}_{=\frac{\overrightarrow{OM_2}}{|\overrightarrow{OM_2}|}}$

  vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{OM_2}}{|\overrightarrow{OM_2}|}$

c). en un point quelconque $M_3$ de l'axe du disque :

- il y a une infinité de plans de symétrie passant par $M_3$ (tous les plans passant par Oz).

L'intersection de tous ces plans coïncide avec l'axe Oz, donc $\vec{E}(M_3) \parallel Oz$ $(\parallel \vec{OM_3})$.

- ici $\rho = 0 \Rightarrow$ les composantes de $\vec{E}(M_3)$ ne dépendent que de $z$, et alors $\vec{E}(M_3) = f(\underbrace{|\vec{OM_3}|}_{= z})\,\vec{e}_z$

d). au centre $M_4$ du disque :

- une infinité de plans de symétrie passant par $M_4$ (tous les plans passant par l'axe $Oz$ + le plan $xy$). L'intersection de ces plans = le point $\underbrace{O}_{= M_4} \Rightarrow \vec{E}(M_4) = \vec{0}$.

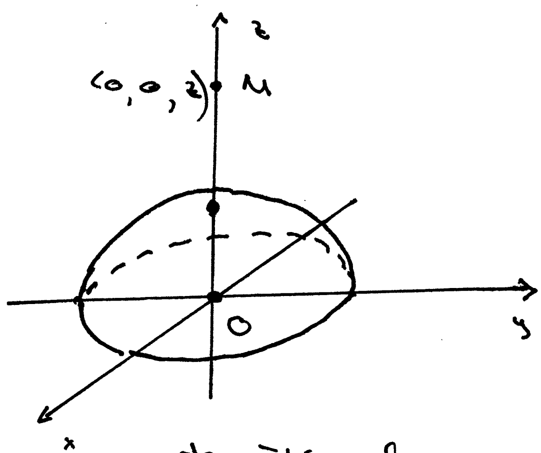
2). Demi-sphère

Plans de symétries:

- tout plan passant par l'axe $Oz$

Symétries continues:

- invariance de rotations autour de l'axe $Oz$




densité volumique uniforme $\rho$

en un point M de l'axe Oz:

- une infinité de plans de symétrie passant par M (tous les plans passant par l'axe z). Leur intersection coïncide avec l'axe $Oz \Rightarrow \vec{E}(M) \parallel Oz$

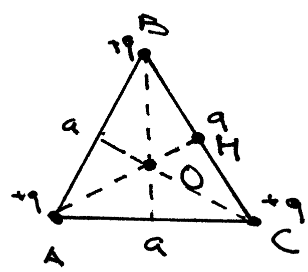
Donc $\vec{E}(M) = f(z)\,\vec{e}_z$ (l'invariance de rotations autour de $Oz$ ne fournit pas d'informations supplémentaires sur $\vec{E}(M)$)

au centre O :

- pas de plan de symétrie supplémentaire passant par $O \Rightarrow$ même conclusion que ci-dessus avec $z=0$

$$\vec{E}(O) = f(0)\,\vec{e}_z$$

## Exercice II — Méthode 1




a). Calculons la force qui s'exerce sur la charge en C :

$$\vec{F}_{+q \text{ en } A \to +q \text{ en } C} = k \frac{q^2}{\underset{a}{\underset{\shortparallel}{|\vec{AC}|^3}}} \vec{AC} = k \frac{q^2}{a^3} \vec{AC}$$

$$\vec{F}_{+q \text{ en } B \to +q \text{ en } C} = k \frac{q^2}{|\vec{BC}|^3} \vec{BC} = k \frac{q^2}{a^3} \vec{BC}$$

$$\vec{F}_{\text{résultante}} = k \frac{q^2}{a^3} (\vec{AC} + \vec{BC})$$

- il est clair que $(\vec{AC} + \vec{BC}) \upuparrows \vec{OC}$
- $|\vec{AC} + \vec{BC}|^2 = (\vec{AC} + \vec{BC}) \cdot (\vec{AC} + \vec{BC}) =$

$$= |\vec{AC}|^2 + |\vec{BC}|^2 + 2\, \vec{AC} \cdot \vec{BC} =$$

$$= \underset{a^2}{\underset{\shortparallel}{|\vec{AC}|^2}} + \underset{a^2}{\underset{\shortparallel}{|\vec{BC}|^2}} + 2\, \underset{a}{\underset{\shortparallel}{|\vec{AC}|}}\, \underset{a}{\underset{\shortparallel}{|\vec{BC}|}} \cos \underbrace{\angle BCA}_{\overset{\shortparallel}{60^\circ}} =$$

$$= 2a^2 + 2a^2 \cdot \frac{1}{2} = 3a^2 \Rightarrow |\vec{AC} + \vec{BC}| = a\sqrt{3}$$

Donc :

$$\vec{F}_{\text{résultante}} = k \frac{q^2}{a^3} \cdot a\sqrt{3}\, \vec{e}_{\vec{OC}} = k \frac{q^2}{a^2} \sqrt{3}\, \vec{e}_{\vec{OC}} .$$

$\uparrow$ vecteur unitaire $\frac{\vec{OC}}{|\vec{OC}|}$

b). Nous avons 4 plans de symétrie passant par O

- le plan ABC (plan du dessin)
- trois plans passant par AO, BO, CO et orthogonaux au plan du dessin.

L'intersection de tous ces plans = le point O, donc $\vec{E}(O) = \vec{0}$.

d). $\vec{F}_{Q \text{ en } O} = Q \cdot \vec{E}(O) = \vec{0}$.

c). $\vec{E}_{+q \text{ en } A}(H) = k \frac{q}{|\vec{AH}|^3} \vec{AH}$

$\vec{E}_{+q \text{ en } B}(H) = k \frac{q}{|\vec{BH}|^3} \vec{BH}$

$\vec{E}_{+q \text{ en } C}(H) = k \frac{q}{|\vec{CH}|^3} \vec{CH}$

Mais nous avons

$$|\vec{AH}| = \sqrt{|\vec{AC}|^2 - |\vec{CH}|^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$|\vec{BH}| = |\vec{CH}| = \frac{a}{2}$$

et alors

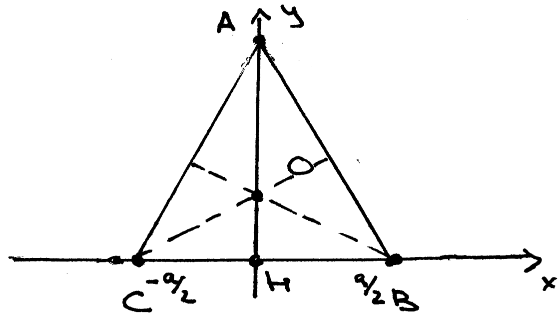
$$\vec{E}(H) = k \frac{q}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3} \vec{AH} + k \frac{q}{(a/2)^3} \underbrace{(\vec{BH} + \vec{CH})}_{= \vec{O}} =$$

$$= k \frac{q}{(a\sqrt{3}/2)^2} \vec{e}_{AH} = \frac{4}{3} \frac{kq}{a^2} \vec{e}_{AH} .$$

vecteur unitaire $\frac{\vec{AH}}{|\vec{AH}|}$

Méthode 2 (coordonnées)

Coordonnées de différents points:




$A = \left(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad H = (0,0)$

$B = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$ $\quad O = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3}, 0\right)$

$C = \left(-\frac{a}{2}, 0\right)$

a). Calculons la force qui s'exerce sur la charge en A:

$$\vec{F}_{q \text{ en } B \to q \text{ en } A} = k \frac{q^2}{|\vec{BA}|^3} \vec{BA}$$

$$\vec{F}_{q \text{ en } C \to q \text{ en } A} = k \frac{q^2}{|\vec{CA}|^3} \vec{CA}$$

Comme $|\vec{BA}| = |\vec{CA}| = a$ et

$$\vec{BA} = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\vec{CA} = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

on obtient

$$\vec{F}_{rés.} = k \frac{q^2}{a^3} \left[ \left(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \right] = \frac{kq^2}{a^3} (0, a\sqrt{3}) =$$

$$= \frac{kq^2}{a^2} \sqrt{3} \, \vec{e}_y .$$

On peut également confirmer les résultats de B et D par calcul explicite.

c). $\vec{E}(H) = k\frac{q}{|\vec{AH}|^3}\vec{AH} + \frac{kq}{|\vec{BH}|^3}\vec{BH} + \frac{kq}{|\vec{CH}|^3}\vec{CH}$

Comme

$$|\vec{AH}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \qquad |\vec{BH}| = |\vec{CH}| = \frac{a}{2},$$

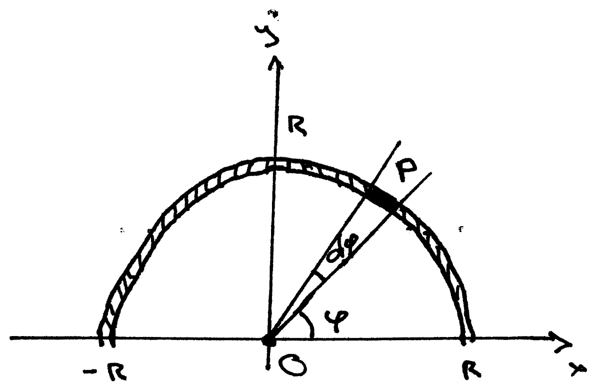
$$\vec{AH} = \left(0, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), \quad \vec{BH} = \left(-\frac{a}{2}, 0\right), \quad \vec{CH} = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$$

on obtient

$$\vec{E}(H) = k\frac{q}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}\left(0, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{kq}{(a/2)^3}\left(-\frac{a}{2}, 0\right) + \frac{kq}{(a/2)^3}\left(\frac{a}{2}, 0\right) =$$

$$= -\frac{4}{3}\frac{kq}{a^2}\vec{e}_y .$$

## Exercice IV




1). Plans de symétrie :

- le plan xy
- le plan passant par Oy et orthogonal au plan du dessin

Les deux plans passent par O, leur intersection coïncide avec l'axe Oy $\Rightarrow$ $\vec{E}(O) \parallel Oy$.

Si $\lambda_0$ est positive, une charge positive Q placée en O subit une force de répulsion $\Rightarrow$ le sens du champ $\vec{E}(O)$ est opposé à celui de l'axe Oy.

2). Considérons l'élément infinitésimal de la tige représenté sur le dessin (correspondant à l'angle $d\varphi$). Sa charge est $dq = \lambda_0 \underbrace{dl}_{\text{longueur}} = \lambda_0 R\, d\varphi$.

On considère cette charge comme ponctuelle, placée en point P de coordonnée polaires $(R, \varphi)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ coordonnées cartésiennes de P sont $(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$.

Calculons le champ créé par cette charge en O :

$$d\vec{E}(O) = k \frac{dq}{|\vec{PO}|^3} \vec{PO} = k \frac{\lambda_0 R \, d\varphi}{R^3} (-R\cos\varphi, -R\sin\varphi) =$$

$$= -\frac{k\lambda_0}{R} d\varphi \, (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

Par la suite il faut faire la somme/intégrale par rapport à tous ces éléments infinitésimaux :

$$\vec{E}(O) = \int_0^{\pi} \left(-\frac{k\lambda_0}{R}\right) d\varphi \, (\cos\varphi, \sin\varphi) =$$

$$= -\frac{k\lambda_0}{R} \left( \int_0^{\pi} \cos\varphi \, d\varphi , \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \right) =$$

$$= -\frac{k\lambda_0}{R} \left( \sin\varphi \Big|_0^{\pi} , -\cos\varphi \Big|_0^{\pi} \right) = -\frac{2k\lambda_0}{R} \vec{e}_y ,$$

ce qui confirme les résultats de 1).